**ΟΡΙΣΜΟΣ:** Μία γραμμική απεικόνιση $f: E \to F$ καλείται ισομετρικός ισομορφισμός $\Leftrightarrow$ η $f$: ισομετρία και ισομορφισμός. Αν υπάρχει ένας ισομετρικός ισομορφισμός $f: E \to F$, τότε οι $E, F$ καλούνται ισομετρικά ισόμορφοι.

**ΘΕΩΡΗΜΑ:** Έστω $(E, \langle , \rangle)$ και $(F, \langle , \rangle)$ Ευκλείδειοι χώροι πεπερασμένης διάστασης. Τότε οι $E, F$: ισομετρικά ισόμορφοι $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \dim_{\mathbb{R}} E = \dim_{\mathbb{R}} F$

## ΑΠΟΔΕΙΞΗ

"$\Rightarrow$" Αν οι $E, F$ (ισομετρικά) ισόμορφοι, τότε οι $E, F$ έχουν την ίδια διάσταση.

"$\Leftarrow$" Έστω $\dim_{\mathbb{R}} F = \dim_{\mathbb{R}} E := n < \infty$. Έστω $B = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n}\}$: ΟΚΒ του $E$ και $C = \{\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2}, \dots, \vec{\varepsilon_n}\}$: ΟΚΒ του $F$. Από το Θεώρημα Γραμμικής Επέκτασης, υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $f: E \to F$ έτσι ώστε: $\forall i = 1, \dots, n$: $f(\vec{e_i}) = \vec{\varepsilon_i}$. Επειδή η $f$ στέλνει βάση σε βάση, έπεται από την Γ.Α.Ι., ότι η $f$: ισομορφισμός. Θα δείξουμε ότι η $f$: ισομετρία, δείχνοντας ότι:
$\forall \vec{x} \in E: \|f(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|$

Θα έχουμε: $\vec{x} = x_1 \cdot \vec{e_1} + x_2 \cdot \vec{e_2} + \dots + x_n \cdot \vec{e_n}$. Τότε:
$f(\vec{x}) = x_1 f(\vec{e_1}) + x_2 \cdot f(\vec{e_2}) + \dots + x_n f(\vec{e_n}) =$
$= x_1 \cdot \vec{\varepsilon_1} + x_2 \cdot \vec{\varepsilon_2} + \dots + x_n \cdot \vec{\varepsilon_n}$

Τότε: $\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \|f(\vec{x})\|$. Άρα $f$: ισομετρία και άρα η $f$ είναι ισομετρικός ισομορφισμός.

**ΠΟΡΙΣΜΑ:** Κάθε Ευκλείδειος χώρος $(E, \langle , \rangle)$ με $\dim_{\mathbb{R}} E = n < \infty$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $(\mathbb{R}^n, \langle , \rangle)$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:** ① Έστω οι Ευκλείδειοι Χώροι $(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle)$, $(\mathbb{R}_2[t], \langle , \rangle) \to \langle P(t), Q(t)\rangle = \int_0^1 P(t)\cdot Q(t)\,dt$

Τότε οι χώροι $(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle)$ και $(\mathbb{R}_2[t], \langle , \rangle)$ είναι ισομετρικά ισόμορφοι, διότι έχουν την ίδια διάσταση. Έστω η ΟΚΒ $B = \{\vec{e_1} = (1,0,0), \vec{e_2} = (0,1,0), \vec{e_3} = (0,0,1)\}$ και έστω η ΟΚΒ $C = \{\vec{\varepsilon_1} = 1, \vec{\varepsilon_2} = \sqrt{12}\left(t - \frac{1}{2}\right), \vec{\varepsilon_3} = \sqrt{180}\left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)\}$ του $\mathbb{R}_2[t]$. Τότε υπάρχει ισομετρικός ισομορφισμός $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[t]$ έτσι ώστε: $f(\vec{e_1}) = \vec{\varepsilon_1}$, $f(\vec{e_2}) = \vec{\varepsilon_2}$, $f(\vec{e_3}) = \vec{\varepsilon_3}$

Τότε: $\forall (a, b, \gamma) \in \mathbb{R}^3 : f(a, b, \gamma) = f(a\cdot\vec{e_1} + b\cdot\vec{e_2} + \gamma\,\vec{e_3}) =$
$= a\cdot f(\vec{e_1}) + b f(\vec{e_2}) + \gamma f(\vec{e_3}) = a\cdot\vec{\varepsilon_1} + b\cdot\vec{\varepsilon_2} + \gamma\,\vec{\varepsilon_3} =$
$= a\cdot 1 + b\cdot\sqrt{12}\left(t - \frac{1}{2}\right) + \gamma\cdot\sqrt{180}\left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)$

② Έστω οι Ευκλείδειοι Χώροι $(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle)$ και $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}), \langle , \rangle)$
$\langle A, B\rangle \overset{\text{*}}{=} Tr(A\cdot {}^tB)$

Τότε οι $(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle)$ και $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}), \langle , \rangle)$ δεν είναι ισομετρικά ισόμορφοι, διότι: $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3 = 3 \neq 4 = \dim_{\mathbb{R}}\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$
Αντίθετα οι Ευκλείδειοι χώροι: $(\mathbb{R}^4, \langle , \rangle)$ και $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}), \langle , \rangle)$ είναι ισομετρικά ισόμορφοι, διότι έχουν την ίδια διάσταση.
$f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$

**ΘΕΩΡΗΜΑ:** (1) Αν $f:(E,\langle,\rangle) \to (E,\langle,\rangle)$ είναι μια ισομετρία όπου $\dim_{\mathbb{R}} E < \infty$, τότε: ο πίνακας $M_B^B(f)$: ορθογώνιος, όπου $B$: ΟΚΒ
(2) Αν $A$ είναι ένας $n \times n$ ορθογώνιος πίνακας, όπου $\dim_{\mathbb{R}} E = n$, τότε: υπάρχει ισομετρία $f: E \to E$, έτσι ώστε: $M_B^B(f) = A$, όπου $B$: ΟΚΒ

ΕΙΔΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: (1) Ο πίνακας μετάβασης μεταξύ 2 ΟΚΒ ενός Ευκλείδειου χώρου, πεπερασμένης διάστασης, είναι ορθογώνιος.

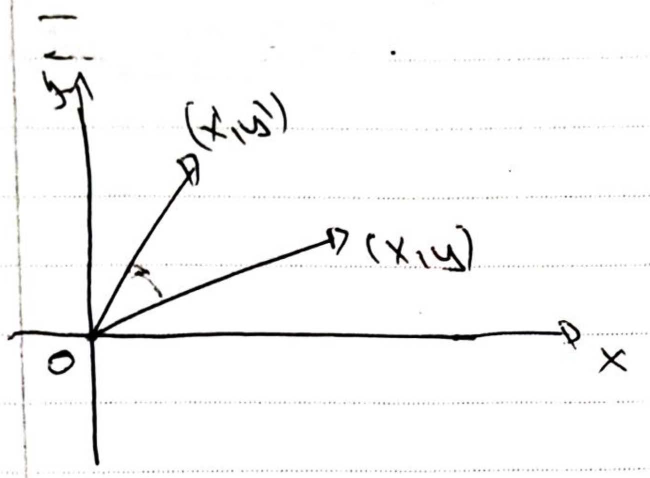
(2) Αν $A$ είναι ορθογώνιος $n \times n$ πίνακας, τότε ο $A$ είναι πίνακας μετάβασης μεταξύ δύο ΟΚΒ του $E$.

- Αν $f:(E,\langle,\rangle) \to (E,\langle,\rangle)$ είναι μια ισομετρία, όπου: $\dim_{\mathbb{R}} E < \infty$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι μια ιδιοτιμή της $f$, τότε: $\lambda = \pm 1$

## ΙΣΟΜΕΤΡΙΕΣ ΣΤΟΝ $\mathbb{R}^2$

Έστω $f:(\mathbb{R}^2,\langle,\rangle) \to (\mathbb{R}^2,\langle,\rangle)$ μια ισομετρία.
Έστω $B = \{\vec{e_1}=(1,0), \vec{e_2}=(0,1)\}$ η συνήθης ΟΚΒ του $\mathbb{R}^2$. Τότε ο πίνακας $A = M_B^B(f)$: ορθογώνιος
Όμως οι ορθογώνιοι $2\times 2$ πίνακες είναι οι εξής:
(1) $\boxed{|A| = 1}$, τότε: $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ για μια μοναδική γωνία $\theta \in [0, \pi)$

Τότε: $f(x,y) = (x', y')$, όπου:
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$$
Άρα: $f(x,y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$
γυρίστε σελίδα →




Γεωμετρικά: Η ισομετρία $f$ με ορίζουσα $|A|=1$, είναι στροφή επιπέδου κατά γωνία $\theta$. Επιπλέον, αν $f \neq Id_{\mathbb{R}^2}$, τότε η $f$ δεν έχει πραγματικές ιδιοτιμές

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} \cos(\theta)-t & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta)-t \end{vmatrix} = \cos^2\theta - 2\cos\theta t + t^2 + \sin^2\theta = \Rightarrow P_A(t) = t^2 - 2\cos(\theta)t + 1$$

$\Rightarrow P_A(t) = t^2 - 2\cos(\theta)\cdot t + 1$. Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $4\cos^2(\theta) - 4$ και τότε:

$4\cos^2\theta - 4 \geq 0 \Rightarrow \cos^2\theta \geq 1 \Leftrightarrow \theta = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f = Id_{\mathbb{R}^2}$ : άτοπο. Άρα $f$: δεν έχει πραγματικές ιδιοτιμές $\Rightarrow \nexists (x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = (x,y)$

Εύρεση της γωνίας περιστροφής $\theta$: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ και τότε $\theta$ είναι η μοναδική γωνία έτσι ώστε $\cos(\theta) = a$

② $\boxed{|A| = -1}$, τότε υπάρχει μοναδική γωνία $\theta \in [0,\pi]$ έτσι ώστε:

$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ τότε: $f(x,y) = (x',y')$ όπου $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$

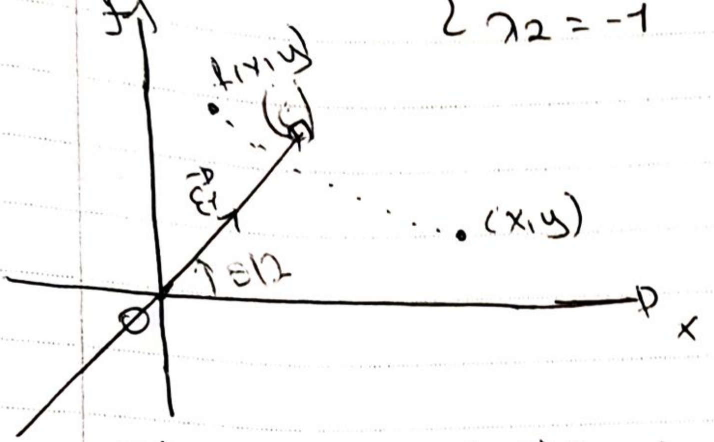
$= (x\cos\theta + y\sin\theta,\ x\sin\theta - y\cos\theta)$

Άρα: $f(x,y) = (x\cos\theta + y\sin\theta,\ x\sin\theta - y\cos\theta)$

$\Rightarrow$

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} \cos\theta - t & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta - t \end{vmatrix} = -\cos^2\theta - \cos\theta t + \cos\theta t + t^2 - \sin^2\theta$$

$\Rightarrow P_A(t) = t^2 - 1 = (t-1)\cdot(t+1) \Rightarrow$ η $f$ έχει δύο ιδιοτιμές $\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$




Έστω $\vec{\varepsilon_1}$: το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$ και $\vec{\varepsilon_2}$: το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = -1$.

Τότε: $C = \{\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2}\}$: βάση του $\mathbb{R}^2$

$V(1) = \{k\cdot\vec{\varepsilon_1} \in \mathbb{R}^2 \mid k \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} V(1) = 1$

$V(-1) = \{k\cdot\vec{\varepsilon_2} \in \mathbb{R}^2 \mid k \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} V(-1) = 1$

<u>Γεωμετρικά</u>: η ισομετρία $f$ του $\mathbb{R}^2$ στην περίπτωση $|A| = -1$ παριστάνει ανάκλαση ως προς ευθεία (ε) η οποία σχηματίζει γωνία $\theta/2$ με τον άξονα $x$.

<u>Εύρεση γωνίας θ</u>: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

η $\theta$ είναι η μοναδική γωνία έτσι ώστε: $\cos\theta = a$

<u>Εύρεση της ευθείας (ε)</u> $= V(1) = \{k\cdot\vec{\varepsilon_1} \in \mathbb{R}^2 \mid k \in \mathbb{R}\}$

$\vec{\varepsilon_1}$: ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην $\lambda_1 = 1$